

Diffusion thermique non-stationnaire dans des milieux multicouches et problème aux valeurs propres—2. Plusieurs parois couplées entre elles

M. BOUZIDI†

Laboratoire de Thermique du C.N.A.M., 292, rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France

(Reçu le 22 décembre 1989 et sous forme finale le 5 juin 1990)

Résumé—Le modèle analytique développé dans la partie 1, basé sur la technique des transformations intégrales et sur le formalisme des matrices de transfert, est étendu aux problèmes de diffusion thermique non-stationnaire dans plusieurs plaques multicouches formant une enceinte où se produisent des échanges couplés par conduction, convection et rayonnement. Cette extension exige, outre la stationnarité des coefficients, la linéarité et la réciprocity des transferts thermiques. Pour le calcul des valeurs propres du problème singulier de Sturm–Liouville associé au problème homogène aux limites résultant de la décomposition du problème original, on montre que la procédure décrite dans la partie 1 est extensible au cas considéré ici.

1. INTRODUCTION

ON ÉTUDIE la diffusion thermique non-stationnaire dans des parois multicouches planes d'enceintes, telles, par exemple, celles des bâtiments et de fours de traitement thermique. D'une manière générale, à l'intérieur de ces enceintes, se produisent des échanges couplés par conduction, convection et rayonnement. Dans le cas des bâtiments, seul le mode de fonctionnement en "régulation parfaite" pour laquelle la température de l'air à l'intérieur d'un local est une fonction connue du temps est considérée ici; la puissance de chauffage est alors inconnue. Cette puissance, ainsi que les énergies mises en jeu pourront être calculées en fonction des sollicitations externes, des conditions internes et de la constitution des parois. L'air du local est supposé parfaitement transparent vis-à-vis du rayonnement thermique. L'échange de chaleur entre chaque face interne d'une paroi et l'air ambiant du local se fait par convection. Par contre les échanges thermiques entre parois se font par rayonnement.

Dans le cas des fours, la montée en température de la source de chaleur peut être libre ou programmée. L'évolution de cette température doit être connue en fonction du temps et exploitable sous forme analytique. On pourra de même alors déterminer la puissance installée dans ces fours et les énergies mises en jeu en fonction de la nature des matériaux composites constituant les parois. Vue la température de fonctionnement de fours électriques [1], les échanges thermiques internes se font essentiellement par rayonnement entre les faces internes des parois et entre ces faces et la source de chaleur.

Parmi les méthodes les plus utilisées pour l'étude de l'évolution thermique en régime non-stationnaire dans les bâtiments, on peut citer la méthode des différences finies dans laquelle on intègre l'équation de conduction thermique par discrétisation spatiale et temporelle, des méthodes très simplifiées basées sur le calcul de quelques constantes de temps pour caractériser un bâtiment et la méthode des facteurs de pondération qui donne des réponses en quelques points de la structure thermique grâce à un produit de convolution des sollicitations. Cependant, ces méthodes peuvent être lourdes en temps calcul comme il a été montré dans les références [2–4] où les auteurs les ont comparées à la méthode modale. Celle-ci ne nécessite pas la résolution complète du problème, mais fait appel à un nombre d'équations simples et de paramètres pour décrire un système thermique où intervient le couplage de ces trois modes de transfert.

Dans une publication récente [5], est utilisée une méthode analytique basée sur la méthode de séparation des variables pour le traitement du problème de diffusion thermique non-stationnaire dans des parois multicouches linéairement couplées entre-elles. Dans ce travail, on généralise l'étude présentée dans la référence [5] en considérant que les conditions aux limites sur les faces externes et internes de l'enceinte sont instationnaires; l'existence éventuelle des résistances thermiques interfaciales et des densités volumiques de chaleur fonctions de l'espace et du temps, est prise en compte. Par ailleurs, on montre que le modèle analytique développé dans la référence [6], pour le cas d'une paroi multicouche unique et qui est basé sur l'usage du formalisme des matrices de transfert et la technique de la transformation intégrale finie, peut être étendu au problème de plusieurs parois planes multiplement couplées. On montre également comment une extension de la procédure développée pour

† Aussi: Université Paris 6, UFR 23, Tour 66, 75252 Paris Cedex 05, France.

NOMENCLATURE

a'_{ij} diffusivité thermique de la j ème couche de la paroi i
 b'_{ij} effusivité thermique de la j ème couche de la paroi i
 c'_{ij} chaleur massique de la j ème couche de la paroi i
 $C_k(t)$ fonction, équation (7a)
 $e'_{ij}, (e_{ij})$ épaisseur (réduite), de la j ème couche de la paroi i ,
 $e_{ij} = (e'_{ij}/e'_{i1})(a'_{i1}/a'_{ij})^{1/2}$
 $F_{ijk}(x_{ij})$ densité de flux associée à une fonction propre
 g_k fonction définie par l'équation (7f)
 $h', (h)$ conductance surfacique (réduite),
 $h = h'/H'$
 H' λ'_{i1}/e'_{i1}
 $I_N(\mu^*)$ nombre total de valeurs propres, équation (8h)
 $I_{n_s}(\mu^*)$ nombre total de valeurs propres quand toutes les parois sont découplées, équation (8i)
 $I_{0N}(\mu^*)$ nombre total de valeurs propres des n_i couches découplées des N parois, équation (8j)
 n_i nombre total de couches de la paroi i
 N_k norme définie par l'équation (6c)
 $p'_{ij}, (p_{ij})$ source volumique de chaleur (réduite), $p_{ij} = p'_{ij}e'_{i1}/a'_{i1}\rho'_{ij}c'_{ij}\Delta T'$
 $R(\mu^*)$ rapport entre deux équations aux valeurs propres, Section 6
 $s\{R_n(\mu)\}$ nombre de signes négatifs des rapports $R(\mu)$, équation (11a)
 $S_{ij}(x_{ij}, t)$ température pour le problème pseudo-stationnaire
 $t', (t)$ temps réel (réduit), $t = t'a'_{i1}/e'_{i1}$
 $T'_{ij}, (T_{ij})$ température (réduite) dans la couche j de la paroi i ,
 $T_{ij} = (T'_{ij} - T'_0)/\Delta T'$, $\Delta T'$: écart de température
 $T_m(t)$ température du milieu environnant la face externe de la paroi i
 T'_0 température de référence
 $V_{ij}(x_{ij})$ fonction définie dans l'équation (3f)

$W_{ij}(x_{ij})$ fonction définie dans l'équation (1f)
 $x'_{ij}, (x_{ij})$ coordonnée d'espace (réduite),
 $x_{ij} = (x'_{ij}/e'_{i1})(a'_{i1}/a'_{ij})^{1/2}$
 $X_{ijk}(x_{ij})$ k ème fonction propre dans la couche j de la paroi i
 $y_k(t)$ fonction définie par l'équation (7c)
 z paramètre, Section 6.

Symboles grecs

$(\alpha), (\beta)$ deux sous-systèmes, Section 6
 β_{ij} effusivité thermique réduite de la j ème couche de la paroi i , β_{ij}/b'_{i1}
 $[\gamma_N]$ matrice diagonale d'ordre N , équation (5k)
 $[\Gamma_{ij}(\mu, e_{ij})]$ matrice de transfert d'ordre 2 de la couche j appartenant à la paroi i , équation (5d)
 $[\delta_N]$ matrice diagonale d'ordre N , équation (5j)
 $\theta_{ij}(x, t)$ température réduite, solution du problème homogène aux limites
 $\tilde{\theta}_k(0)$ transformation intégrale de la condition initiale, définie par l'équation (7f)
 $\tilde{\theta}_k(t)$ transformation intégrale de la température définie par l'équation (7h)
 λ'_{ij} conductivité thermique de la j ème couche de la paroi i
 μ, μ_k paramètre valeur propre et k ème valeur propre respectivement
 $\xi_{m_s}(\mu), \eta_{im}(\mu), \chi_{im}(\mu), \zeta_{im}(\mu)$ coefficients de la matrice globale de transfert, relation (5g)
 ρ'_{ij} masse volumique de la couche j appartenant à la paroi i
 φ_{ij}, ϕ_{ij} densités de flux réduites des problèmes respectivement original et homogène aux limites
 $(\Omega(\mu))$ fonction définie par l'équation (5n).

Indices

i indice de paroi i , $i = 1, \dots, N$
 j indice de couche j , $j = 1, 2, \dots, n$
 k indice de valeur propre et de fonction propre correspondante, $k = 1, 2, \dots$

le calcul des valeurs propres est possible dans le cas considéré ici.

2. FORMULATION DU PROBLEME TRAITÉ

Le problème qu'on se propose d'étudier est celui de la diffusion thermique non-stationnaire à travers N parois multicouches planes d'encintes. On considère que les équations traduisant les trois modes de transfert couplés par conduction, convection et rayon-

nement sont linéaires. En outre, on suppose que l'écoulement de la chaleur est normale aux parois (problème unidirectionnel). Chaque paroi i est constituée de n_i couches comme le montre la Fig. 1. L'origine des coordonnées d'espace est variable et est liée à chaque couche j . Celle-ci, d'épaisseur e'_{ij} est homogène et isotrope et ses propriétés thermophysiques ρ'_{ij} , c'_{ij} et λ'_{ij} sont constantes. Les résistances thermiques interfaciales $1/h'_{ij}$ (h'_{ij} étant la conductance de contact à l'interface $x'_{ij} = e'_{ij}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, (n_i - 1)$)

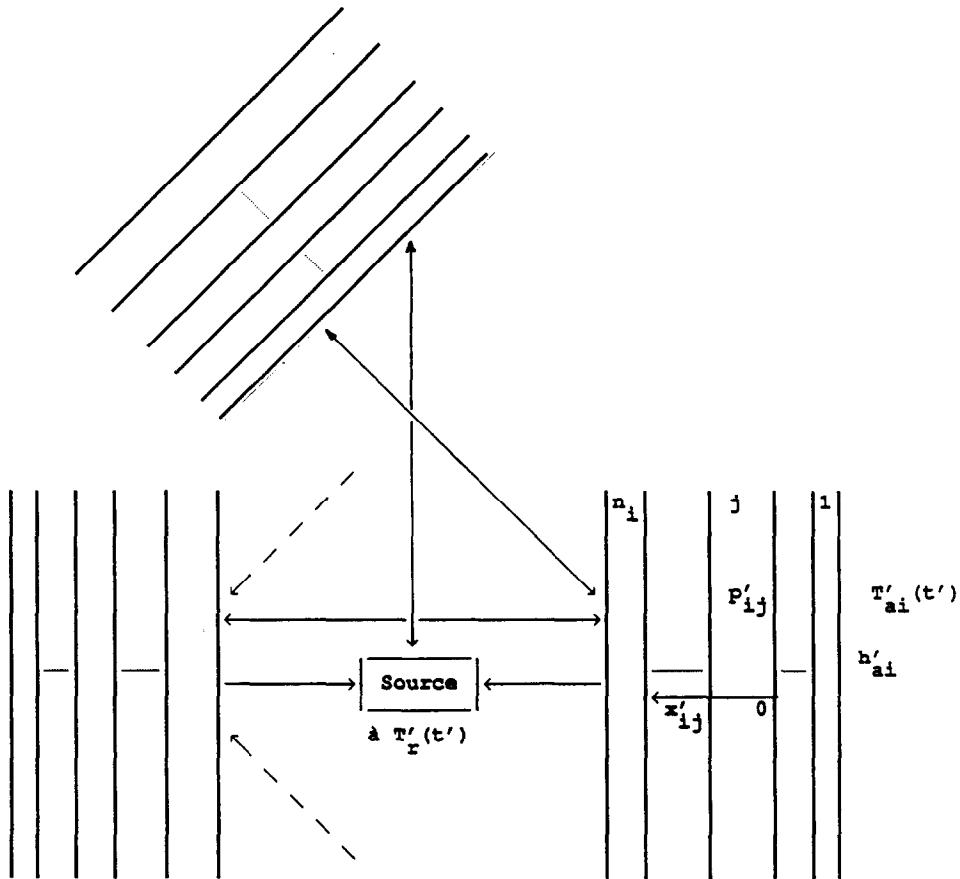


FIG. 1. Modèle de N parois multicouches couplées entre elles.

et les densités volumiques de chaleur $p'_{ij}(x'_{ij}, t')$ sont prises en compte. L'échange de chaleur entre la face externe de la paroi i et du milieu environnant à température $T'_a(t')$ se fait par l'intermédiaire d'un coefficient constant h'_{ai} . Quant aux échanges de chaleur à l'intérieur de l'enceinte, ils se font d'une part suivant une loi linéaire d'échange avec la source à température $T'_r(t')$ (coefficient h'_{ri}), d'autre part, selon un échange linéaire entre parois (rayonnement linéarisé, coefficient h'_{ik} , $i \neq k$). L'équation de continuité de flux de chaleur, issue de la loi de conservation de l'énergie, permet d'établir un lien entre les équations de transfert thermique : conduction dans les parois solides, rayonnement linéarisé entre parois et convection entre parois et fluide. C'est ce lien qui constitue le problème couplé, ci-dessous mis en équations. Enfin, le champ de température dans chaque paroi à l'instant initial est $T'_{ij}(x'_{ij}, 0) = W'_{ij}(x'_{ij})$, pour $0 < x'_{ij} < e'_{ij}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$. Comme dans [6], l'introduction des grandeurs adimensionnelles :

$$T_{ij} = (T'_{ij} - T'_0) / \Delta T', \quad t = \frac{a'_{11}}{e'^2_{11}} t',$$

$$e_{ij} = \frac{x'_{ij}}{e'_{11}} \left(\frac{a'_{11}}{a'_{ij}} \right)^{1/2}$$

permet une simplification de l'écriture des équations traduisant le transfert thermique dans l'ensemble des parois couplées. Ainsi, le champs transitoire de température $T_{ij}(x_{ij}, t)$ dans la couche j appartenant à la paroi i est gouverné par l'équation adimensionnelle de conduction :

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{ij}(x_{ij}, t) = \nabla^2 T_{ij}(x_{ij}, t) + p_{ij}(x_{ij}, t)$$

$$t > 0, \quad 0 < x_{ij} < e_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i. \tag{1a}$$

A l'équation indéfinie (1a), sont associées les conditions

$$\varphi_{i1}(x_{i1}, t) = h_{ai}[T_a(t) - T_{i1}(x_{i1}, t)] \tag{1b}$$

sur les faces externes de l'enceinte en $x_{i1} = 0$, $i = 1, \dots, N$, $t > 0$, et

$$\varphi_{ij}(e_{ij}, t) = \varphi_{ij+1}(0, t) \tag{1c}$$

$$T_{ij}(e_{ij}, t) = T_{ij+1}(0, t) + \varphi_{ij}(e_{ij}, t) / h_{ij} \tag{1d}$$

$$t > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, (n_i - 1)$$

aux limites interfaciales entre les couches j et $j+1$ de la paroi i , ainsi que

$$\begin{aligned} \varphi_{m_i}(x_{m_i}, t) &= h_{ii}[T_{m_i}(x_{m_i}, t) - T_i(t)] \\ &+ \sum_{k \neq i}^N h_{ik}[T_{m_i}(x_{m_i}, t) - T_{k n_k}(x_{k n_k}, t)] \\ \text{en } x_{m_i} &= e_{m_i}, \quad i = 1, \dots, N, \text{ pour } t > 0 \end{aligned} \quad (1e)$$

sur les faces internes de l'enceinte où il est supposé que les échanges couplés par conduction, convection et rayonnement à l'intérieur de cette enceinte restent linéaires durant l'évolution thermique. Dans les équations (1b)-(1e), la densité de flux est définie par

$$\varphi_{ij}(x_{ij}, t) = -\beta_{ij} \nabla T_{ij}(x_{ij}, t)$$

où

$$\beta_{ij} = \frac{b'_{ij}}{b'_{11}} \text{ (effusivité thermique réduite)}$$

et les coefficients h dans les équations (1b), (1d) et (1e) sont réduits par rapport à H' :

$$h = \frac{h'}{H'} \quad \text{où} \quad H' = \frac{\lambda'_{11}}{e'_{11}}$$

La condition initiale est

$$T_{ij}(x_{ij}, 0) = W_{ij}(x_{ij})$$

$$t = 0, \quad 0 < x_{ij} < e_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i. \quad (1f)$$

Pour des valeurs particulières du paramètre h_{ii} ($h_{ii} \rightarrow \infty$ ou $h_{ii} = 0$), on obtient à partir de l'équation (1b) des conditions de première ou de deuxième espèce sur les faces externes de l'enceinte. Le cas spécial où la résistance thermique interfaciale $1/h_{ij}$ est nulle entre couches j et $j+1$ c'est à dire quand $h_{ij} \rightarrow \infty$, équation (1d), se réduit à une continuité de température

$$T_{ij}(e_{ij}, t) = T_{ij+1}(0, t)$$

$$t > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, (n_i - 1). \quad (1g)$$

3. DECOMPOSITION DU PROBLEME ORIGINAL

Comme pour le cas d'une paroi unique multicouches et pour les mêmes raisons évoquées dans la référence [6] (éviter les phénomènes de Gibbs aux endroits des discontinuités), on décompose le problème original, équations (1), en deux: l'un pseudo-stationnaire et aux limites non-homogènes en $S_{ij}(x_{ij}, t)$, l'autre non-stationnaire homogène aux limites en $\theta_{ij}(x_{ij}, t)$, soit:

$$T_{ij}(x_{ij}, t) = S_{ij}(x_{ij}, t) + \theta_{ij}(x_{ij}, t). \quad (2)$$

La solution du problème de conduction thermique en régime pseudo-stationnaire est établi en annexe: l'introduction de la relation (2) dans les équations (1) permet d'obtenir les équations du problème homogène aux limites ci-dessous. Ainsi, l'équation (1a) prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta_{ij}(x_{ij}, t) &= \nabla^2 \theta_{ij}(x_{ij}, t) + p_{ij}(x_{ij}, t) - \frac{\partial}{\partial t} S_{ij}(x_{ij}, t) \\ t > 0, \quad 0 < x_{ij} < e_{ij}, \quad i &= 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i \end{aligned} \quad (3a)$$

sachant que

$$\nabla^2 S_{ij}(x_{ij}, t) = 0.$$

Les conditions aux limites externes (1b) s'écrivent:

$$\begin{aligned} \phi_{i1}(x_{i1}, t) &= -h_{oi} \theta_{i1}(x_{i1}, t) \\ x_{i1} &= 0, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{pour } t > 0. \end{aligned} \quad (3b)$$

Les conditions aux limites interfaciales, équations (1c) et (1d) deviennent:

$$\phi_{ij}(e_{ij}, t) = \phi_{j-1}(0, t) \quad (3c)$$

$$\theta_{ij}(e_{ij}, t) = \theta_{j+1}(0, t) + \phi_{ij}(e_{ij}, t)/h_{ij} \quad (3d)$$

$$t > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, (n_i - 1).$$

Les conditions sur les faces internes des parois de l'enceinte, équation (1e), prennent la forme:

$$\begin{aligned} \phi_{m_i}(x_{m_i}, t) &= h_{ii} \theta_{m_i}(x_{m_i}, t) \\ &+ \sum_{k \neq i}^N h_{ik} [\theta_{m_i}(x_{m_i}, t) - \theta_{k n_k}(x_{k n_k}, t)] \\ t > 0, \quad x_{m_i} &= e_{m_i}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3e)$$

Dans les équations (3b)-(3e), on a posé

$$\phi_{ij}(x_{ij}, t) = -\beta_{ij} \nabla \theta_{ij}(x_{ij}, t).$$

Quant à la condition initiale (1f), elle se transforme en

$$\begin{aligned} \theta_{ij}(x_{ij}, 0) &= V_{ij}(x_{ij}) \equiv W_{ij}(x_{ij}) - S_{ij}(x_{ij}, 0) \\ t = 0, \quad 0 < x_{ij} < e_{ij}, \quad i &= 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i. \end{aligned} \quad (3f)$$

Le cas particulier où $h_{ij} \rightarrow \infty$, équation (3e), se réduit à

$$\begin{aligned} \theta_{ij}(e_{ij}, t) &= \theta_{j+1}(0, t) \\ t > 0, \quad i &= 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, (n_i - 1). \end{aligned} \quad (3g)$$

Comme dans [6], la solution du problème homogène aux limites s'obtenant à l'aide de la technique de la transformation intégrale finie passe par celle du problème aux valeurs propres associé. Celui-ci est défini par le système d'équations différentielles du second ordre

$$\begin{aligned} \nabla^2 X_{ij}(\mu, x_{ij}) + \mu^2 X_{ij}(\mu, x_{ij}) &= 0 \\ 0 < x_{ij} < e_{ij}, \quad i &= 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i \end{aligned} \quad (4a)$$

auquel sont associées les conditions suivantes:

$$F_{i1}(\mu, x_{i1}) = -h_{oi} X_{i1}(\mu, x_{i1}), \quad x_{i1} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4b)$$

sur les faces externes des parois

$$F_{ij}(\mu, e_{ij}) = F_{i+1}(\mu, 0) \tag{4c}$$

$$X_{ij}(\mu, e_{ij}) = X_{i+1}(\mu, 0) + F_{ij}(\mu, e_{ij})/h_{ij} \tag{4d}$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i$$

aux limites interfaciales entre les couches j et $j+1$ de la paroi i , et

$$F_{m_i}(\mu, x_{m_i}) = h_{ij}X_{m_i}(\mu, x_{m_i}) + \sum_{l \neq i}^N h_{il}[X_{m_i}(\mu, x_{m_i}) - X_{m_l}(\mu, x_{m_l})] \tag{4e}$$

sur les faces internes des parois de l'enceinte. Dans les équations (4b)–(4e), $F_{ij}(\mu, x_{ij})$ est défini par

$$F_{ij}(\mu, x_{ij}) = -\beta_{ij}\nabla X_{ij}(\mu, x_{ij}).$$

Pour alléger l'écriture, il est intéressant de mettre (4e) sous une forme matricielle :

$$[\mathbf{F}_N] = [\mathbf{H}_N][\mathbf{X}_N] \tag{4f}$$

où $[\mathbf{F}_N]$ et $[\mathbf{X}_N]$ sont des matrices colonnes à N lignes avec les termes généraux $F_{m_i}(\mu, e_{m_i})$ pour la première et $X_{m_i}(\mu, e_{m_i})$ pour la dernière ; $[\mathbf{H}_N]$ que nous appelons matrice de couplage entre parois est une matrice carrée dont le terme général diagonal est

$$H_{ii} = \sum_{l=1}^N h_{il}$$

et les termes non-diagonaux valent $-h_{il}$ ($i \neq l$).

Pour la résolution de ce problème aux valeurs propres avec couplage, on va utiliser le formalisme des matrices de transfert.

4. SOLUTION DU PROBLEME AUX VALEURS PROPRES

La solution de ce problème s'obtient en déterminant l'équation aux valeurs propres et les fonctions propres.

4.1. Equation aux valeurs propres

Les fonctions $X_{ij}(\mu, x_{ij})$ qui résolvent le système d'équations différentielles (4a) ont la même forme que celle obtenue pour une paroi multicouches (cas du problème plan, $m = 0$, dans [6]) avec un indice supplémentaire relatif à la paroi, soit :

$$X_{ij}(\mu, x_{ij}) = X_{ij}(\mu, 0) \cos(\mu, x_{ij}) - F_{ij}(\mu, 0) \frac{\sin(\mu x_{ij})}{\mu\beta_{ij}}$$

$$0 < x_{ij} < e_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i. \tag{5a}$$

De même les $F_{ij}(\mu, x_{ij})$ prennent la forme

$$F_{ij}(\mu, x_{ij}) = F_{ij}(\mu, 0) \cos(\mu x_{ij}) + \mu\beta_{ij}X_{ij}(\mu, 0) \sin(\mu x_{ij}) \tag{5b}$$

dans laquelle $X_{ij}(\mu, 0)$ et $F_{ij}(\mu, 0)$ sont des constantes à déterminer plus loin. Pour $x_{ij} = e_{ij}$, les équations (5a) et (5b) se réduisant à :

$$\begin{bmatrix} X_{ij}(\mu, x_{ij}) \\ F_{ij}(\mu, e_{ij}) \end{bmatrix} = [\Gamma_{ij}(\mu, e_{ij})] \begin{bmatrix} X_{ij}(\mu, 0) \\ F_{ij}(\mu, 0) \end{bmatrix},$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i \tag{5c}$$

avec

$$[\Gamma_{ij}(\mu, e_{ij})] = \begin{bmatrix} \cos(\mu e_{ij}) & -\frac{1}{\mu\beta_{ij}} \sin(\mu e_{ij}) \\ \mu\beta_{ij} \sin(\mu e_{ij}) & \cos(\mu e_{ij}) \end{bmatrix} \tag{5d}$$

qui est la matrice de transfert relative à la couche j de la paroi i .

L'écriture des conditions interfaciales, équations (4c) et (4d), sous une forme matricielle, se réduit à

$$\begin{bmatrix} X_{i+1}(\mu, 0) \\ F_{i+1}(\mu, 0) \end{bmatrix} = [R_{ij}] \begin{bmatrix} X_{ij}(\mu, e_{ij}) \\ F_{ij}(\mu, e_{ij}) \end{bmatrix},$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, (n_i - 1) \tag{5e}$$

où

$$[R_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1/h_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et, compte tenu de (5c) et (5e), on obtient

$$\begin{bmatrix} X_{m_i}(\mu, e_{m_i}) \\ F_{m_i}(\mu, e_{m_i}) \end{bmatrix} = \prod_{j=n_i}^1 [\Gamma_{ij}(\mu, e_{ij})][R_{ij-1}] \begin{bmatrix} X_{i1}(\mu, 0) \\ F_{i1}(\mu, 0) \end{bmatrix},$$

$$i = 1, \dots, N \tag{5f}$$

où, par convention, $[R_{i0}]$ est une matrice unité et l'on pose

$$\begin{bmatrix} \xi_{m_i}(\mu) & \eta_{m_i}(\mu) \\ \zeta_{m_i}(\mu) & \chi_{m_i}(\mu) \end{bmatrix} = \prod_{j=n_i}^1 [\Gamma_{ij}(\mu, e_{ij})][R_{ij-1}]. \tag{5g}$$

Les éléments de cette matrice globale de transfert relative à la paroi i se calculent sans difficulté par récurrence (équations (6e)–(6h) de [6]).

A l'aide des conditions aux limites sur les faces externes des parois, équation (4b), la double équation (5f) s'écrit :

$$X_{m_i}(\mu, e_{m_i}) = [\xi_{m_i}(\mu) - h_{m_i}\eta_{m_i}(\mu)]X_{i1}(\mu, 0) \tag{5h}$$

$$F_{m_i}(\mu, e_{m_i}) = [\zeta_{m_i}(\mu) - h_{m_i}\chi_{m_i}(\mu)]X_{i1}(\mu, 0). \tag{5i}$$

La relation (5i) permet de ramener la condition aux limites sur chaque face externe à la face interne de chaque paroi. En notation matricielle, cette relation devient :

$$[\mathbf{F}_N] = [\delta_N][\mathbf{X}_1] \tag{5j}$$

où $[\delta_N]$ est une matrice diagonale d'ordre N et $[\mathbf{X}_1]$ est une matrice colonne à N lignes.

A l'aide de la relation (5h) écrite en notation matricielle

$$[\mathbf{X}_N] = [\gamma_N][\mathbf{X}_1] \tag{5k}$$

où $[\gamma_N]$ est une matrice diagonale, le système d'équations (4f) devient :

$$[\mathbf{F}_N] = [\mathbf{H}_N][\gamma_N][\mathbf{X}_1]. \tag{5l}$$

En retranchant membre à membre (5j) et (5l), on obtient :

$$(\Omega_N(\mu))[\mathbf{X}_1] = [0] \tag{5m}$$

avec

$$(\Omega_N(\mu)) = ([\mathbf{H}_N][\gamma_N] - [\delta_N]). \tag{5n}$$

Clairement, le système d'équations (5m) admet une solution non triviale si et seulement si

$$\det(\Omega_N(\mu)) = 0. \tag{5o}$$

Les valeurs propres du problème singulier de Sturm–Liouville, défini par les équations (4), sont les valeurs μ_k pour lesquelles $\det(\Omega_N(\mu)) = 0$. L'équation (5o) est une équation transcendante qui a un nombre infini de racines positives. La recherche de ces racines qui ne peut être obtenue que numériquement, est dans doute l'étape la plus délicate de la résolution. Notons que, plus le nombre de parois augmente, plus le risque d'accumulation des valeurs propres autour d'un ou de plusieurs points croît et surtout s'il existe des parois identiques. Dans ces conditions, les méthodes numériques conventionnelles n'écartent pas le danger d'oubi de valeurs propres aux cours de leur calcul. Pour cela, une technique fiable pour le calcul de ces valeurs propres sera proposée plus loin.

4.2. Fonctions propres

L'équation aux valeurs propres étant maintenant connue, on peut calculer les fonctions propres $X_{ij}(\mu_k, x)$ notées $X_{ijk}(x)$, solutions de l'équation différentielle (4a) et vérifiant les conditions aux limites, équations (4b)–(4e). En outre, ces fonctions propres doivent être orthogonales, comme démontré dans la référence [5]. On rappelle seulement qu'il a été défini un produit scalaire sous la même forme que le cas d'une paroi unique, par :

$$\langle X_{ijk}(x_{ij}), X_{ijl}(x_{ij}) \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} \int_0^{c_{ij}} X_{ijk}(x_{ij}) X_{ijl}(x_{ij}) dx_{ij}. \tag{6a}$$

Les fonctions propres $X_{ijk}(x_{ij})$ et $X_{ijl}(x_{ij})$ associées à deux valeurs propres distinctes μ_k et μ_l sont orthogonales vis-à-vis du produit scalaire si elles vérifient la condition d'orthogonalité :

$$\langle X_{ijk}(x_{ij}), X_{ijl}(x_{ij}) \rangle = \delta_{kl} N_k \tag{6b}$$

dans laquelle δ_{kl} est le symbole de Kronecker et N_k , l'intégrale de normalisation, est :

$$N_k \equiv \langle X_{ijk}(x_{ij}), X_{ijk}(x_{ij}) \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} \int_0^{c_{ij}} X_{ijk}^2(x_{ij}) dx_{ij}. \tag{6c}$$

On précise toutefois que pour $k \neq l$, le produit scalaire

n'est nul que si la matrice de couplage $[\mathbf{H}_N]$ est symétrique.

Pour chaque valeur propre μ_k , les fonctions propres $X_{ijk}(x_{ij})$ dépendent de deux constantes inconnues $X_{ijk}(0)$ et $F_{ijk}(0)$, équation (5a). Ces deux constantes de la couche j appartenant à la paroi i sont linéairement dépendantes des seules inconnues correspondantes de la première couche de cette même paroi i telles que :

$$\begin{bmatrix} X_{ijk}(0) \\ F_{ijk}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{ij-1k} & \eta_{ij-1k} \\ \zeta_{ij-1k} & \chi_{ij-1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i1k}(0) \\ F_{i1k}(\mu) \end{bmatrix}, \tag{6d}$$

$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, (n_i - 1).$

L'introduction des expressions de $X_{ijk}(0)$ et de $F_{ijk}(0)$, avec l'aide des conditions externes, équation (4b), dans les relation (5a), permet d'écrire :

$$X_{ijk}(x_{ij}) = X_{i1k}(0) \left[Y_{ij-1k} \cos(\mu x_{ij}) - Z_{ij-1k} \frac{\sin(\mu x_{ij})}{\mu \beta_{ij}} \right] \tag{6c}$$

$0 < x_{ij} < c_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i.$

De même, on peut écrire :

$$F_{ijk}(x_{ij}) = X_{i1k}(0) [Y_{ij-1k} \mu \beta_{ij} \sin(\mu x_{ij}) - Z_{ij-1k} \cos(\mu x_{ij})] \tag{6f}$$

où

$$Y_{ij-1k} = \xi_{ij-1k} - h_{ai} \eta_{ij-1k}$$

$$Z_{ij-1k} = \zeta_{ij-1k} - h_{ai} \chi_{ij-1k}.$$

Sachant que les fonctions propres peuvent être déterminées à une constante arbitraire multiplicative près, on peut par convention, imposer $X_{i1k}(0) = 1$. Ainsi, pour $i = 1$, on retrouve le cas d'une paroi plane unique. Les autres inconnues $X_{i1k}(0)$ ($i = 2, \dots, N$) qui expriment le couplage sont calculés en résolvant le système d'équations (5m) réduit à l'ordre $(N - 1)$.

5. SOLUTION DU PROBLEME HOMOGENE AUX LIMITES

Soit la représentation des fonctions $\theta_{ij}(x_{ij}, t)$ sous la forme

$$\theta_{ij}(x_{ij}, t) = \sum_{k=1}^l C_k(t) X_{ijk}(x_{ij}) \tag{7a}$$

solution du problème homogène aux limites défini par les équations (3). A l'aide de la relation d'orthogonalité (6b), on définit, comme dans le cas d'une paroi seule [6] :

la transformation intégrale

$$\tilde{\theta}_k(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} \int_0^{c_{ij}} \theta_{ij}(x_{ij}, t) X_{ijk}(x_{ij}) dx_{ij} \tag{7b}$$

et la formule d'inversion

$$\theta_{ij}(x_{ij}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_{ijk}(x_{ij})}{N_k} \tilde{\theta}_k(t). \tag{7c}$$

En appliquant le couple de la transformation intégrale, défini par les équations (7b) et (7c), aux équations (3a) et (4a), on obtient, pour la transformation de la température $\tilde{\theta}_k(t)$ l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d\tilde{\theta}_k(t)}{dt} + \mu_k^2 \tilde{\theta}_k(t) = y_k(t) \tag{7d}$$

où

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} \int_0^{c_{ij}} X_{ijk}(x_{ij}) \left[p_{ij}(x_{ij}, t) - \frac{\partial}{\partial t} S_{ij}(x_{ij}, t) \right] dx_{ij}. \tag{7e}$$

La condition initiale $\tilde{\theta}_k(0)$ associée à l'équation (7d) est déterminée en construisant la transformation de la condition initiale (3f) conformément à la transformation (7b). On obtient :

$$\tilde{\theta}_k(0) \equiv g_k = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} \int_0^{c_{ij}} V_{ij}(x_{ij}) X_{ijk}(x_{ij}) dx_{ij} \tag{7f}$$

d'où la solution de l'équation (7d) vérifiant la condition initiale (7f) :

$$\tilde{\theta}_k(t) = \exp(-\mu_k^2 t) \left[g_k + \int_0^t y_k(\tau) \exp(\mu_k^2 \tau) d\tau \right]. \tag{7g}$$

L'introduction de l'expression de $\tilde{\theta}_k(\tau)$ dans la formule d'inversion (7c) permet alors l'obtention de la solution du problème homogène aux limites, soit :

$$\theta_{ij}(x_{ij}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_{ijk}(x_{ij})}{N_k} \exp(-\mu_k^2 t) \times \left[g_k + \int_0^t y_k(\tau) \exp(\mu_k^2 \tau) d\tau \right]. \tag{7h}$$

L'expression de la densité de flux $\phi_{ij}(x_{ij}, t)$ de ce problème homogène aux limites, s'obtient en remplaçant $X_{ijk}(x_{ij})$ par $F_{ijk}(x_{ij})$ dans le second membre de (7h).

6. PROCEDURE POUR LE CALCUL DES VALEURS PROPRES

Cette procédure est une extension de celle décrite dans la référence [6]. On utilise en particulier la propriété dite P1 et le fait que l'introduction d'une containte à une interface donnée d'une paroi unique multicouches la divise en deux sous-système découplés (α) et (β) dont l'équation aux valeurs propres s'écrit :

$$K_{\alpha}(\mu)K_{\beta}(\mu) = 0. \tag{8a}$$

Dans le problème couplé considéré ici, on impose

cette contrainte à une face interne de la paroi i . Ainsi, on considère le système (L) formé par :

—le sous-système (α) contenant l'ensemble des L parois couplées entre elles par leurs faces internes. Ce couplage étant exprimé par la relation (5l) et à l'aide de (5j), d'après l'équation (5o) en remplaçant N par L , on obtient

$$\det(\Omega_L(\mu)) = 0 \tag{8b}$$

—le sous-système (β) contenant l'ensemble des $N-L$ autres parois soumises chacune à la condition (4b) (avec $i = (L+1), \dots, N$) sur sa face externe et à la contrainte

$$X_{im}(e_m) = 0, \quad i = (L+1), \dots, N \tag{8c}$$

sur sa face interne. D'après la relation (5k) permettant de ramener la condition sur chaque face externe à la face interne de chaque paroi, et compte tenu de la condition (4b), l'équation aux valeurs propres relative à chacune des $N-L$ parois découplées est :

$$\gamma_i(\mu) \equiv \zeta_{m_i}(\mu) - h_{m_i} \eta_{m_i}(\mu) = 0, \tag{8d}$$

$$i = (L+1), \dots, N$$

car $X_{i1k}(0)$, dans la relation (5k), n'est pas nul pour $i = (L+1), \dots, N$. D'après (8a) et sous réserve que $\gamma_i(\mu) \neq 0$ pour $i \leq L$, l'équation aux valeurs propres du système (L) s'écrit :

$$\det(\Omega_L(\mu)) \prod_{i=L+1}^N \gamma_i(\mu) = 0. \tag{8e}$$

Soit maintenant le système ($L+1$). Le sous-système (α) contient $L+1$ parois couplées en ayant enlevé la contrainte exprimée par l'équation (8c) sur la face interne de la ($L+1$)ème paroi. Les $N-(L+1)$ parois contenues dans le système (β) sont entièrement découplées. Dans ces conditions, l'équation aux valeurs propres du système ($L+1$) s'écrit :

$$\det(\Omega_{L+1}(\mu)) \sum_{i=L+2}^N \gamma_i(\mu) = 0. \tag{8f}$$

Le rapport entre les deux équations aux valeurs propres (8e) et (8f) pour une valeur positive μ^* du paramètre μ est :

$$R_{L+1}(\mu^*) = \frac{\det(\Omega_{L+1}(\mu^*))}{\det(\Omega_L(\mu^*))\gamma_{L+1}(\mu^*)}. \tag{8g}$$

On applique ensuite la propriété P1 [6] au cas considéré ici : Si $R_{L+1}(\mu^*)$ est négatif, alors le nombre $I_{L+1}(\mu^*)$ de valeurs propres n'excédant pas la valeur μ^* , du système ($L+1$) est égal au nombre $I_L(\mu^*)$ du système (L) augmenté d'une unité, sinon, le nombre de valeurs propres reste inchangé. Ainsi, en supprimant les contraintes du même type que (8c) sur les faces internes une à une, on construit un algorithme convenable pour le calcul des racines de l'équation transcendante aux valeurs propres, équation (5o).

On note que le nombre de rapports, équation (8g), dont il faut tester les signes est égal au nombre de

parois couplées N moins une unité. Les rapports extrêmes sont :

$$R_2(\mu^*) = \frac{\det(\Omega_2(\mu^*))}{\det(\Omega_1(\mu^*))\gamma_2(\mu^*)}$$

et

$$R_N(\mu^*) = \frac{\det(\Omega_N(\mu^*))}{\det(\Omega_{N-1}(\mu^*))\gamma_N(\mu^*)}$$

où $\det(\Omega_1(\mu))$ est l'équation aux valeurs propres relative à la première couche et elle est identique à celle d'une paroi multicouche unique. Pour $L = 0$

$$R_1(\mu^*) = \frac{\det(\Omega_1(\mu^*))}{\gamma_1(\mu^*)}$$

est identique au rapport extrême $R'_i(\mu)$ dans le cas d'une paroi unique [6].

La procédure de calcul du nombre $I_N(\mu^*)$ de valeurs propres dans un problème à N parois couplées se résume comme suit : on initialise le processus de calcul avec un nombre $I_{n_i}(\mu^*)$ de valeurs propres correspondant au cas où toutes les parois sont découplées en imposant les contraintes

$$X_{n_i}(e_{m_i}) \equiv \gamma_i(\mu) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Ce nombre est lui-même obtenu en traitant chacune des parois séparément par application de la procédure décrite dans [6]. On établit ainsi la relation

$$I_N(\mu^*) = I_{n_i}(\mu^*) + s\{R_N(\mu^*)\} \quad (8h)$$

$s\{R_N(\mu^*)\}$ désignant le nombre de signes négatifs des rapports $R_{L+1}(\mu^*)$, équation (8g), pour $L = 1, \dots, (N-1)$ et $I_{n_i}(\mu^*)$ étant le nombre de valeurs propres pour les N parois découplées :

$$I_{n_i}(\mu^*) = I_{0N}(\mu^*) + s\{R'_{n_i}(\mu^*)\}; \quad (8i)$$

ici

$$I_{0N}(\mu^*) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \left[\text{ent} \left(\frac{\mu^* e_{ij}}{\pi} \right) \right] \quad (8j)$$

est le nombre de valeurs propres quand les n_i couches des N parois sont indépendantes, la valeur de la fonction $\text{ent}(z)$ est le plus grand entier n'excédant pas la valeur de l'argument z de la fonction, et

$$s\{R'_{n_i}(\mu^*)\} = \sum_{i=1}^N [s\{R'_n(\mu^*)\}]. \quad (8k)$$

Pour chaque paroi i , $s\{R'_n(\mu^*)\}$ désigne le nombre de signe négatifs des rapports $R'_n(\mu^*)$ qui sont les correpants de $R'_i(\mu^*)$ dans le cas d'une paroi unique.

7. SOLUTION DU PROBLEME ORIGINAL

La solution du problème original défini par les équations (1), s'obtient à partir de la décomposition donnée par l'équation (2) dans laquelle les problèmes homogène aux limites et pseudo-stationnaire sont

maintenant résolus. Ainsi, à l'aide de l'équation (7g) dans laquelle les valeurs propres μ_k sont calculées à l'aide de la procédure décrite dans la Section 6 et de l'équation (A11) établie en annexe, on écrit la solution de ce problème original, sous une forme adéquate pour une exploitation numérique; on a :

$$T_{ij}(x_{ij}, t) = T_{ai}(t) - f_i(t) \left[1/h_{ai} + x_{ij}/\beta_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} (1/h_{ik} + e_{ik}/\beta_{ik}) \right] + \sum_{k=1}^i \frac{X_{ijk}(x_{ij})}{N_k} \exp(-\mu_k^2 t) \times \left[g_k + \int_0^t (p_k + s_k) \exp(\mu_k^2 \tau) d\tau \right] \quad (9)$$

où

$$g_k = \langle V_{ij}(x_{ij}), X_{ijk}(x_{ij}) \rangle$$

$$p_k = \langle p_{ij}(x_{ij}, \tau), X_{ijk}(x_{ij}) \rangle$$

$$s_k = \left\langle -\frac{\partial}{\partial \tau} S_{ij}(x_{ij}, \tau), X_{ijk}(x_{ij}) \right\rangle.$$

8. CONCLUSION

Ce travail présente un modèle analytique commode et élégant mathématiquement pour la résolution des problèmes de diffusion thermique non-stationnaire dans des plaques multicouches d'enceintes. Ce modèle prend en compte les échanges couplés par conduction, convection et rayonnement à l'intérieur de ces enceintes. Les hypothèses admises sont la stationnarité des coefficients thermophysiques du milieu, la linéarité et la réciprocité des transferts de chaleur. Pour le calcul des valeurs propres du problème singulier de Sturm-Liouville associé, il est proposé une procédure qui est en fait une extension de celle relative à une paroi seule [6], ce qui rend le modèle analytique entièrement fiable. Un exemple d'application est traité dans la réf. [7] où est simulé le fonctionnement d'un four à charge.

REFERENCES

1. J. L. Mazoyer, S. F. T., Journée d'études sur les fours à résistances, Mai (1984).
2. P. Bacot, Analyse modale des système thermiques, Thèse 3ème cycle, Paris VI (1984).
3. J. Sicard, Analyse modale appliquée à la thermique : fondements analytiques, applications au bâtiment, Thèse 3ème cycle, Paris VI (1984).
4. J. Sicard, P. Bacot et A. Neveu, Analyse modale des échanges thermiques dans le bâtiment, *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, 113-123 (1985).
5. M. Bouzidi and P. Duhamel, Non-stationary heat conduction in composite slabs with coupling. Application to enclosures : numerical computation of the analytical solution, *Comp. Math. Applic.* **11**, 1043-1055 (1985).
6. M. Bouzidi, Diffusion thermique non-stationnaire dans des milieux multicouches et problème aux valeurs propres—1. Une paroi unique multicouches, *Int. J. Heat Mass Transfer* **34**, 1259-1270 (1991).
7. M. Bouzidi et P. Duhamel, Modélisation des transferts

thermiques dans les fours: application de la méthode des transformations intégrales, *Revue Gén. Thermique* **346**, 458-473 (1990).

ANNEXE. SOLUTION DU PROBLEME PSEUDO-STATIONNAIRE

L'équation de diffusion thermique en régime pseudo-stationnaire gouvernant la distribution de température $S_{ij}(x_{ij}, t)$ dans la couche j appartenant à la paroi i est:

$$\nabla^2 S_{ij}(x_{ij}, t) = 0 \tag{A1}$$

$$t \geq 0, \quad 0 < x_{ij} < e_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i.$$

A cette équation sont associées les conditions

$$f_{i1}(x_{i1}, t) = h_{ai}[T_{ai}(t) - S_{i1}(x_{i1}, t)] \tag{A2}$$

aux limites externes en $x_{i1} = 0, i = 1, \dots, N, t \geq 0$

$$f_{ij}(e_{ij}, t) = f_{i,j+1}(0, t) \tag{A3}$$

$$S_{ij}(e_{ij}, t) = S_{i,j+1}(0, t) + S_{ij}(e_{ij}, t)/h_{ij} \tag{A4}$$

$$t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, (n_i - 1)$$

aux limites interfaciales entre les couches j et $j+1$ de la paroi i

$$f_{in_i} = h_{ii}[S_{in_i} - T_i(t)] + \sum_{k \neq i} h_{ik}[S_{in_i} - S_{kn_i}] \tag{A5}$$

$$\text{en } x_{in_i} = e_{in_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{pour } t \geq 0$$

sur les faces internes des parois, en ayant posé

$$f_{ij} = -\beta_{ij} \nabla S_{ij}.$$

L'équation (A1) a pour solution

$$S_{ij}(x_{ij}, t) = S_{ij}(0, t) - f_i(t) \frac{x_{ij}}{\beta_{ij}} \tag{A6}$$

avec

$$f_i(t) \equiv f_{ij}(t).$$

Compte tenu de la condition (A4) et à l'aide de (A6), on

exprime la température sur chaque face interne en fonction de celle de la face externe:

$$S_{in_i}(e_{in_i}, t) = S_{i1}(0, t) - f_i(t) \left[\sum_{j=1}^{n_i} (e_{ij}/\beta_{ij} + r_{ij}) - r_{in_i} \right] \tag{A7}$$

avec

$$r_{ij} = 1/h_{ij}.$$

La condition aux limites externes (A2) permet d'écrire la relation (A7) sous la forme

$$S_{in_i}(e_{in_i}, t) = T_{ai}(t) - f_i(t) R_i, \quad i = 1, \dots, N \tag{A8}$$

dans laquelle

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} (e_{ij}/\beta_{ij} + r_{ij-1}) \quad \text{et où } r_{i0} = 1/h_{ai}.$$

En introduisant le second membre de la relation (8) dans l'équation (A5), on obtient:

$$f_i(t) = h_{ii}[-f_i(t)R_i + T_{ai}(t) - T_i(t)] + \sum_{k \neq i} h_{ik}[-f_k(t)R_k + T_{ak}(t) - T_{ak}(t)], \tag{A9}$$

$$i = 1, \dots, N$$

ou, en écriture matricielle:

$$([U] + [R])[H][F] = [E][G] \tag{A10}$$

avec $[U]$: matrice unité d'ordre N , $[R]$: matrice diagonale d'ordre N avec le terme général R_i , $[H]$: matrice carrée d'ordre N dont les termes diagonaux sont $H_{ii} = \sum_{k=1}^{n_i} h_{ik}$ et les termes non-diagonaux valent $-h_{ik}$, $[F]$: matrice colonne dont les termes sont $f_i(t)$, $[E]$: matrice colonne avec les termes $h_{ii}[T_{ai}(t) - T_i(t)]$, $[G]$: matrice colonne dont les termes sont $\sum_{k \neq i} h_{ik}[T_{ak}(t) - T_{ak}(t)]$.

Les $f_i(t)$ s'obtiennent en résolvant le système linéaire (A10). La solution $S_{ij}(x_{ij}, t)$ vérifiant l'équation (A1) et les conditions aux limites (A2)-(A5) s'écrit sous la forme:

$$S_{ij}(x_{ij}, t) = T_{ai}(t) - f_i(t) \left[x_{ij}/\beta_{ij} + 1/h_{ai} + \sum_{k=1}^{j-1} (e_{ik}/\beta_{ik} + r_{ik}) \right]. \tag{A11}$$

TRANSIENT HEAT DIFFUSION IN MULTILAYERED COMPOSITE MEDIA AND EIGENVALUE PROBLEM—2. SEVERAL MULTILAYERED WALLS WITH COUPLING

Abstract—The analytical model developed in Part 1 and based on the finite integral transform technique and the transfer matrix formalism, is extended to the transient heat diffusion problems in several multilayered walls of enclosures with heat transfer by conduction, convection and radiation. This extension requires the stationarity of the coefficients, the linearity and the reciprocity of thermal transfers. For the computation of eigenvalues of the singular Sturm-Liouville problem associated to the boundary homogeneous problem, we show that the procedure developed in the first paper is adaptable to the present approach.

LÖSUNG DES EIGENWERT-PROBLEMS BEI DER INSTATIONÄREN WÄRMELEITUNG IN EINEM MEHRSCICHTIG ZUSAMMENGESETZTEN MEDIUM—2. MEHRERE GESCHICHTETE, MITEINANDER GEKOPPELTE WÄNDE

Zusammengassung—Im ersten Teil der Abhandlung wurde ein analytisches Modell aufgrund der endlichen Integraltransformation und dem Formalismus der Transfermatrix entwickelt. Dieses Modell wird nun auf Probleme der instationären Wärmeleitung in mehrfachgeschichteten Wänden eines Hohlraums mit Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung ausgedehnt. Diese Ausdehnung erfordert stationäre Koeffizienten sowie eine Linearität und Umkehrbarkeit des Wärmetransports. Es wird gezeigt, daß die Berechnung von Eigenwerten des singulären Sturm-Liouville-Problems und des angebundnen homogenen Randproblems mit Hilfe des im ersten Teil der Arbeit entwickelten Verfahrens möglich ist.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ
СРЕДАХ И ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ — 2. НЕСКОЛЬКО
СОЕДИНЕННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ СТЕНOK

Аннотация—Разработанная в части 1 аналитическая модель, которая основана на методе конечного интегрального преобразования и формализме матрицы переноса, распространяется на применение к нестационарным задачам теплопереноса в нескольких многослойных стенках полостей, где теплоперенос осуществляется теплопроводностью, конвекцией и излучением. Для распространения модели требуются условия постоянства коэффициентов и линейности процессов. Показано, что предложенный в части 1 метод может использоваться для расчета собственных значений сингулярной задачи Штурма–Лиувилля, связанной с граничной однородной задачей.